Escola Naval 2005/2006

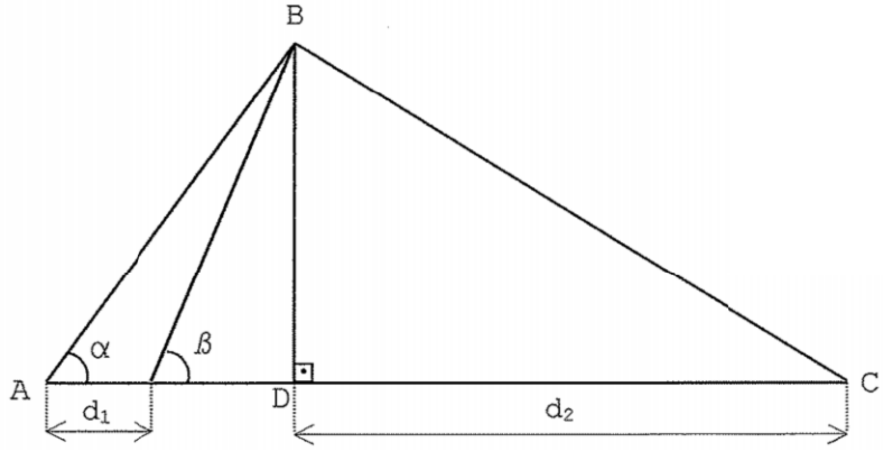
MARINHA DO BRASIL

DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA

(PROCESSO SELETIVO DE ADMISSÃO À ESCOLA NAVAL / PSAEN-2005)

MATEMÁTICA

1) Considere a figura abaixo:



A área do triângulo BDC é

(A) $\dfrac{d_1+d_2}{\cot g\alpha-\cot g\beta}$

(B) $\dfrac{d_1.d_2}{2(\cot g\alpha+\cot g\beta)}$

(C) $\dfrac{d_1+d_2}{2(\cot g\alpha-\cot g\beta)}$

(D) $\dfrac{d_1.d_2}{2\cot g\alpha-\cot g\beta}$

(E) $\dfrac{d_1.d_2}{2(\cot g\alpha-\cot g\beta)}$

2) Os coeficientes dos três primeiros termos do desenvolvimento de $\left(x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^n$ coincidem com os três primeiros termos de uma progressão aritmética (PA). O valor do 11° termo da PA é

(A) 27

(B) 29

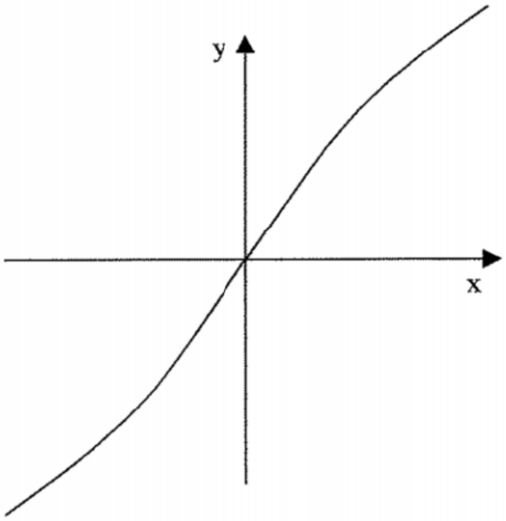
(C) 31

(D) 33

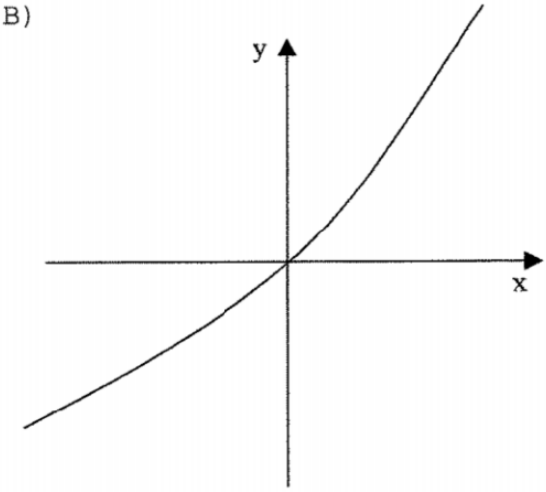
(E) 35

3) Dentre as opções abaixo, aquela que melhor representa o gráfico da função real de variável real $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$ é

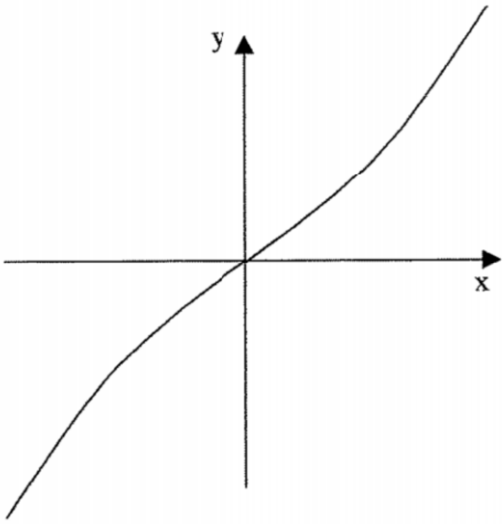
(A)



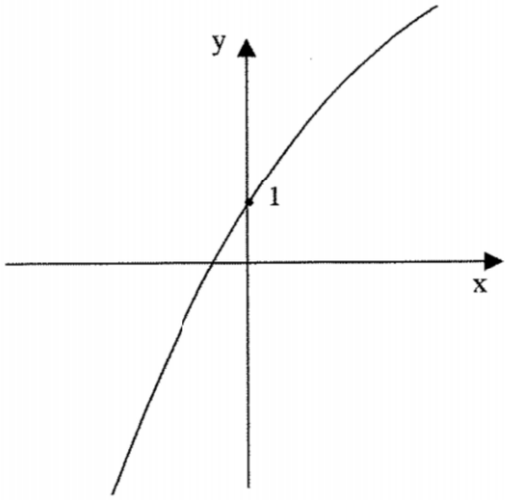
(B)



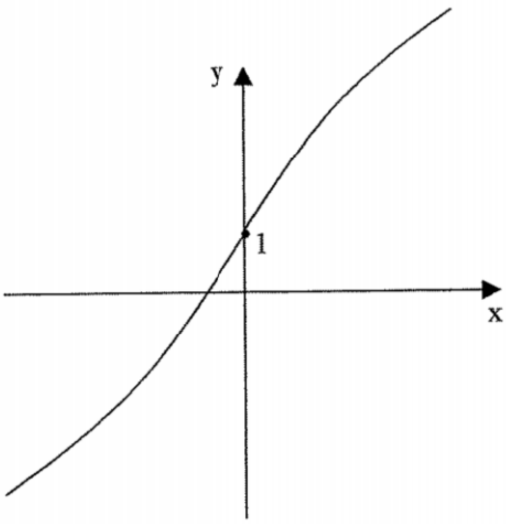
(C)



(D)



(E)



4) Seja $\vec{w}$ um vetor unitário do $\Re^3$, normal aos vetores $\vec{u}=(-1,1,1)$ e $\vec{v}=(0,-1,-1)$ e com 2ª coordenada positiva. Se θ é o ângulo entre os vetores $(\sqrt{2}\,\vec{w}+\vec{u})$ e $(-\vec{v})$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, então cossec 2θ vale

(A) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

(B) $\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$

(C) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(D) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(E) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

5) Seja $y=y(x)$ uma função real que satisfaz à equação $8y-(\dfrac{x^6+2}{x^2})=0$, $x\in\Re_-^*$. O valor de $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ é

(A) $\dfrac{x^6}{12}+\dfrac{\ln|x|}{2}+c$

(B) $-\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^{-2}}{4}+c$

(C) $-\dfrac{x^6}{12}-\ln|x|+c$

(D) $\dfrac{-x^6}{12}-\dfrac{\ln|x|}{2}+c$

(E) $\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^{-2}}{4}+c$

6) Um recipiente cilíndrico que deve ter $1\mathbf{m}^3$ de volume vai ser construído nas oficinas do Arsenal de Marinha, para atender a um dos navios da MB. Na lateral e na tampa, será utilizado um material cujo preço é R$ 1.000,00 por $\mathbf{m}^2$ e, no fundo, um material cujo preço é R$ 2.000,00 por $\mathbf{m}^2$. Que dimensões deve ter o recipiente, para que a MB tenha a menor despesa possível?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\dfrac{1}{3\pi^2}$ m

(B) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\pi}}$ m e $\dfrac{1}{9\pi\sqrt[3]{\pi^2}}$ m

(C) $\dfrac{1}{\pi\sqrt[3]{3}}$ m e $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9\pi^2}}$ m

(D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$ m

(E) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\dfrac{1}{\pi\sqrt[3]{9\pi^2}}$ m

7) O cálculo de $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$ é igual à

(A) $\dfrac{ln\left|1+e^{4x}\right|}{4}+c$

(B) $2\,\text{arctg}\ e^{2x}+c$

(C) $\dfrac{\text{arctg}\ e^{2x}}{4}+c$

(D) $\dfrac{ln\left|1+e^{4x}\right|}{4e^{2x}}+c$

(E) $\dfrac{-\text{arc cotg}\ e^{2x}}{2}+c$

8) O conjunto de todos os números reais que satisfazem à desigualdade $|1-2x|+|x+1|-|2x-3|>2$ é

(A) $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]5, +\infty\right[$

(B) $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right] \cup \left]5, +\infty\right[$

(C) $\left]-\infty, -5\right[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(D) $\left]-\infty, -5\right[\cup \left[5, +\infty\right[$

(E) $\left]-\infty, -5\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

9) Seja A o menor inteiro pertencente ao domínio da função real, de variável real, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{9}{16} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{(1-x)}}}$. Pode-se afirmar que $\log_A 2\sqrt{2\sqrt{2}}$ pertence ao intervalo

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

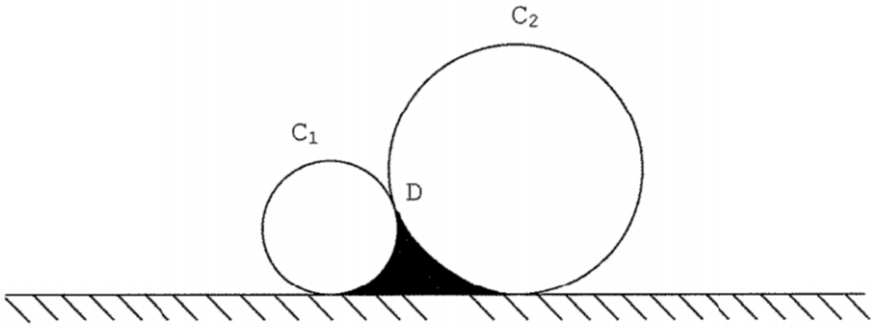
(B) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

(C) $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

(D) $\left[1, \frac{3}{2}\right[$

(E) $\left]\frac{3}{2}, 2\right]$

10) Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios 1cm e 3cm, respectivamente, apoiados em uma reta horizontal e tangentes no ponto D, conforme a figura



O raio do círculo C_3 cuja área coincide, numericamente, com o perímetro da região em negrito é, em cm,

(A) $\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}$

(B) $\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{4}{\pi}}$

(C) $\sqrt{5+\frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$

(D) $\sqrt{\frac{5\pi}{3}+2\sqrt{3}}$

(E) $\sqrt{\frac{5}{3}+2\sqrt{3}\pi}$

11) Na discussão do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{z} = 0 \end{cases} \qquad \text{com } x, y, z \in \Re^*$$

concluímos que o sistema é possível e indeterminado se

(A) $a = \dfrac{3}{19}$

(B) $a \neq \dfrac{-17}{9}$

(C) $a \neq \dfrac{3}{19}$

(D) $a = \dfrac{-17}{9}$

(E) $a \neq \dfrac{-17}{11}$

12) Para que o resto da divisão do polinômio $P(x) = 8m^3x^4 + 12mx^3 + 1$ por $Q(x) = 4x+2$ seja maior que zero, deve-se ter

(A) $-3 < m < -2$

(B) $m > 1$

(C) $m > -2$

(D) $m<1$ ou $m>2$

(E) $m < 2$

13) Um depósito de óleo diesel existente em uma das Organizações Militares da MB tem a forma de um prisma hexagonal regular com altura de 2 metros. Sabendo-se que o comprimento da diagonal maior do depósito vale $\frac{2\sqrt{30}}{9}$ do comprimento da diagonal menor da base, pode-se dizer que o valor da função f, definida por $f(x) = 2x^{-1/3}$ no número **V** representante do volume do depósito vale

(A) $2\frac{\sqrt[6]{3}}{9}$

(B) $2\frac{\sqrt{3}}{9}$

(C) $2\frac{\sqrt[6]{243}}{9}$

(D) $2\frac{\sqrt[6]{243}}{5}$

(E) $2\frac{\sqrt[6]{243}}{3}$

14) Uma das raízes da equação $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\, i$ também é raiz da equação

(A) $x^2 + 2\sqrt{3}\, x + 4 = 0$

(B) $x^2 + 3 = 0$

(C) $x^2 - 2\sqrt{3}\, x + 6 = 0$

(D) $x^2 - 4\sqrt{3}\, x + 16 = 0$

(E) $x^2 + 4\sqrt{3}\, x + 13 = 0$

15) O simétrico do ponto M=(3,4) em relação à reta que une os pontos A=(-1,3) e B=(4,-2) pertence à curva cuja equação é

(A) $x^2+2y^2=5$

(B) $y=x^2+1$

(C) $\frac{x^2}{4}+y^2=2$

(D) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

(E) $x^2-y^2=4$

16) Sejam f e g funções reais de variável real. Se

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15}-8} & \text{se } x \neq 7 \\ a & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

é contínua em $x=7$ e $g(x)=\ln^2\left(2x+\frac{6}{7}\right)$, pode-se afirmar que $g'\left(\sqrt{7}\,a\right)$ vale

(A) 0

(B) $\ln 2$

(C) 1

(D) $\ln 4$

(E) 2

17) Em uma pirâmide regular, de base hexagonal, o apótema da base mede 1cm. Se a altura da pirâmide mede o dobro da medida da diagonal de um cubo de $8cm^3$ de volume, então a razão entre a área lateral da pirâmide e a área total do cubo vale

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

(B) $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

(C) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

(D) $\frac{13\sqrt{3}}{12}$

(E) $2\sqrt{3}$

18) No intervalo $[0,\pi]$ a equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ possui soma dos inversos das raízes igual à

(A) $\frac{15}{2\pi}$

(B) $\frac{117}{10\pi}$

(C) $\frac{15}{\pi}$

(D) 2π

(E) $\frac{117}{5\pi}$

19) Seja L a reta tangente ao gráfico da função real, de variável real, $Y(x) = e^{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Se P e Q são os pontos de interseção de L com os eixos coordenados, a medida da área do triângulo de vértices P, Q e (0,0) é

(A) $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi\,(\pi+1)}{2}$

(B) $\dfrac{\sqrt{2}\,(\pi+1)^2}{8}$

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)^2$

(D) $\dfrac{\sqrt{2}(\pi-1)^2}{4}$

(E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)^2$

20) Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ duas funções reais e deriváveis tais que $\boldsymbol{f}'(x) = \operatorname{sen}(\cos\sqrt{x})$ e $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{f}(x^2)$, $x \in \mathfrak{R}_+^*$. Pode-se afirmar que $g'(x^2)$ é igual à

(A) $2x\ \operatorname{sen}(\cos\ x^2)$

(B) $2x^2\ \cos(\cos\ x^2)$

(C) $2x^2\ \operatorname{sen}(\cos\ x^2)$

(D) $2x\ \cos(\cos\ x)$

(E) $2x^2\ \operatorname{sen}(\cos\ x)$

Escola Naval – Gabarito Comentado PSAEN 2006 - PROVA ROSA
Elaborado por alunos do ITA: Caio Guimarães, Ishai Elarrat, Felipe Moraes

---

1. Seja x = base – d1 – d2.

Da figura:

$$\begin{cases} x = h.ctg\beta \\ x + d_1 = h.ctg\alpha \end{cases} \Rightarrow d_1 = h.(ctg\alpha - ctg\beta) \Rightarrow h = \frac{d_1}{(ctg\alpha - ctg\beta)}$$

$$S = \frac{d_2.h}{2} \Rightarrow S = \frac{d_1.d_2}{2(ctg\alpha - ctg\beta)}$$ (Opção E)

---

2. Comentário: Nessa questão, faltou ser indicado que o desenvolvimento do binômio em questão deveria ser considerado desenvolvido segundo a ordem dos termos decrescentes das potências de x.

$$T_1 = C(n,0).(x^{2n})$$

$$T_2 = C(n,1).(x^{2n-1}).(\frac{1}{2x})^1 = \frac{n}{2}.x^{2n-2}$$

$$T_3 = C(n,2).(x^{2n-2}).(\frac{1}{2x})^2 = \frac{n(n-1)}{8}.(x^{2n-4})$$

Como os termos estão em PA:

$$Termo_3 + Termo_1 = 2Termo_2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{8} + 1 = n \Rightarrow n(n-1) = 8.(n-1) \Rightarrow n = 1, n = 8$$

Como n=1 nos dá somente 2 termos no desenvolvimento, n=8

$$(\frac{8}{2}) - 1 = razão \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10.r = 1 + 10.3 = 31$$ (Opção C)

3.

i) f(-x) = -x + 2 . arctg (-x) = -x - 2. arctg (x) = - (x + arctg x) = - f(x) . Logo f é uma função ímpar.
Com isso temos que f deverá ser simétrica em relação à origem.

ii) $f'(x) = 1 + \frac{2}{1 + x^2} > 0, \forall x \Rightarrow$ f é estritamente crescente em todo seu domínio

iii) $$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

Logo antes do 0, f tem concavidade pra cima, e depois para baixo

De (i) ,(ii) e (iii) concluímos que o grafico tem o esboço de : (Opção A)

---

4. W é um vetor normal a U e V, logo é um vetor paralelo ao produto vetorial u x v . Para t real temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-i + k + i - j).t = (0, -t, t)$$

Achando os vetores unitários paralelos ao produto vetorial (lembrando que $-t > 0$) :

$$\sqrt{0^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{2}.|t| = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos T = \frac{(\sqrt{2}\vec{w} + \vec{u}).(-\vec{v})}{|\sqrt{2}\vec{w} + \vec{u}|.|-\vec{v}|}$$

$$= \frac{[(0,1,-1) + (-1,1,1)].[(0,1,1)]}{|(0,1,-1) + (-1,1,1)|.|[0,-1,-1|} = \frac{(-1,2,0).(0,1,1)}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} T = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \csc(2T) = \frac{1}{2.\operatorname{sen}T.\cos T} = \frac{5}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

(Opção B)

---

5. $$8y = \frac{x^6 + 2}{x^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow 8.(\frac{dy}{dx}) = 4x^3 - \frac{4}{x^3} \Rightarrow (\frac{dy}{dx}) = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

Fazendo $u = x^3$, temos que $dx = du/(3x^2)$

$$\int x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^3}\right)\right)^2} dx = \int x^2 \sqrt{\frac{(4 + x^6 - 2 + x^{-6})}{4}} dx$$

$$= \int \frac{du}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1}{6}\int du.\sqrt{(u + \frac{1}{u})^2} = \frac{1}{6}\int |(u + u^{-1})|.du = -\frac{u^2}{12} - \frac{\ln|u|}{6} + C$$

Substituindo novamente na variável x:

$= -\frac{x^6}{12} - \frac{\ln|x|}{2} + C$ (Opção D)

---

6. $V=\pi.r^2h=1\Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi.r^2}$

Seja f(r) a função na variável positiva r que nos dê o gasto em função do tamanho do raio do cilindro.

$$\begin{aligned} f(r) &= 1000.(\pi.r^2)+2000.(\pi.r^2)+1000.(2\pi.r.h) \\ &= 3000.(\pi.r^2)+2000.(\pi.r.\frac{1}{\pi.r^2})=3000.(\pi.r^2)+2000.r^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(r)=6000.(\pi.r)-\frac{2000}{r^2}=0\Leftrightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$$

Discussão do sinal da 1ª derivada:

$$\begin{cases} r>\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\Rightarrow f'(r)>0 \\ r<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\Rightarrow f'(r)<0 \end{cases}\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$$ é um ponto de mínimo pois f(r) é derivável pra todo r

Temos que $h=\dfrac{1}{\pi.r^2}\Rightarrow h=\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$

Considerando que as dimensões pedidas são raio e altura, a opção correta é : (Opção D)

---

7. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=I$ Fazendo $u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}.dx$

$$I=\int\frac{e^{2x}}{1+u^2}.\frac{du}{2.e^{2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}.\text{Arc}\tan(u)+C=\frac{1}{2}.\text{Arc}\tan(e^{2x})+C$$

$$=\frac{1}{2}.\text{Arc}\cot(e^{-2x})+C=-\frac{1}{2}.\text{Arc}\cot(e^{2x})+C$$ (Opção E)

8.

$$\begin{cases} x<-1\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=-x-1\\|1-2x|=1-2x\\|2x-3|=3-2x\end{cases} \\ -1\le x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=1-2x\\|2x-3|=3-2x\end{cases} \end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=2x-1\\|2x-3|=3-2x\end{cases} \\ x\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=2x-1|\\|2x-3|=2x-3\end{cases} \end{cases}$$

i) $x < -1 \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x-x-1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ x < -5 \end{cases}$

ii) $-1 \le x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x+x+1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ x > 3 \end{cases}$

Não existe x nesse intervalo que satisfaça a condição inicial

iii) $\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 2x-1+x+1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ 5x > 5 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} > x > 1 \end{cases}$

iv) $\dfrac{3}{2} \le x \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x+x+1-2x+3 > 2 \Leftrightarrow \\ -3x > -3 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Fazendo a intersecção , temos: $x \in (-\infty, -5) U (1, +\infty)$ (opção E)

---

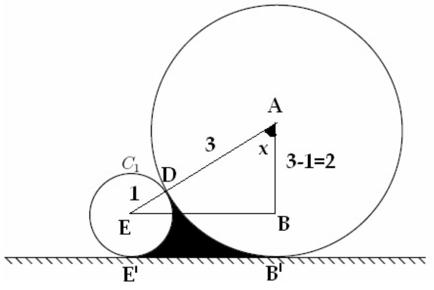
9. A função f está definida para todo x que atende à condição:

$$\frac{9}{16} - \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} \Leftrightarrow -2 > 1-x \Leftrightarrow x > 3$$

Como x é o menor inteiro que atende a essa condição, x=4

$\log_4 2\sqrt{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 2^{1+1/2+1/4} = \dfrac{7}{8}$ que pertence ao intervalo [1/2 , 1] (opção A)

10.



$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 60^o \Rightarrow \begin{cases} \text{arco}B'D = \dfrac{2\pi.3}{6} = \pi \\ \text{arco}E'D = \dfrac{2\pi.1}{3} \\ EB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S_{C_3} = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{5\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \pi.R^2$$

$$\Rightarrow R_{C_3} = \sqrt{\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}}$$

(Opção A)

11. Substituindo x´ = 1/x , y´= 1/y , z´= 1/y . O sistema será Possível e Indeterminado quando o novo sistema também for.

$$\begin{cases} x'-2y'+z'=0 \\ ax'+y'+2z'=0 \\ 3x'-y'-4z'=0 \end{cases}$$

Sistema Homogêneo => P. Indeterminado ⇔ Det. Principal = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4-12-a-3+2-8a=0 \Leftrightarrow -9a=17 \Leftrightarrow a=-\frac{17}{9}$$

(Opção D)
** OBS: Esse é um sistema homogêneo não linear, portanto existe a possibilidade desse sistema ser impossível, já que não admite a solução trivial (x,y,z)=(0,0,0)

---

12. O Resto de P(x) na divisão por 4x +2 é dado por P(-1/2) - (D´ Alembert)

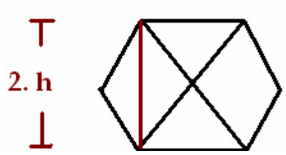
$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = 8m^3.\left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 12m.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{1}{2}(m^3-3m+2)$$

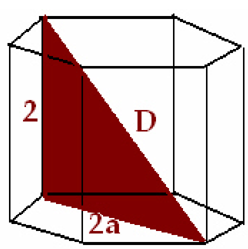
$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(m-1)^2(m+2) > 0 \Leftrightarrow m > -2, m \neq 1$$

Logo o resto é positivo, se e somente se m é tal que : $m \in]-2,1[\cup]1,+\infty[$

(Não há resposta)
** OBS: A questão deverá ser anulada, pois não apresenta a condição que m deve obedecer para que o resto seja positiva, como pede o enunciado.

13.





h é a altura do triangulo eqüilátero de lado a (onde a é a aresta da base do prisma
$\Rightarrow$ d = 2h

$$D = \frac{2\sqrt{30}}{9}.d = \frac{2\sqrt{30}}{9}.\left(2.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow D = \frac{2a\sqrt{10}}{3}$$

$$D^2 = 2^2 + 4a^2 \Rightarrow \frac{4a^2.10}{9} = 4 + 4a^2 \Rightarrow a = 3$$

Portanto:

$$V = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2 = 27\sqrt{3} = 3^{7/2}$$

$$\Rightarrow f(v) = 2.(V)^{-1/3} = 2.\frac{1}{3^{7/6}} = \frac{2.}{3^{2-(5/6)}} = \frac{2.(243)^{1/6}}{9}$$

(Opção C)

---

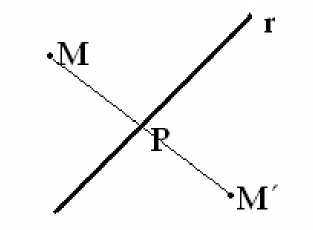
14. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16\,.\text{cis}\,(\frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ 4\arg(Z) = \frac{2\pi}{3} + 2k.\pi,\ k \in Z \end{cases}$

Como as equações possuem coeficientes reais, sabemos que o conjugado de z deverá ser a 2ª raiz da equação. O produto das raízes , que por Girard é (c/a), vale $z.\bar{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$

Portanto, a única equação possível será a que o termo independente é 4. (Opção A)

**OBS: Poderíamos ter encontrado o Z dado o sistema, montado e verificado que era raiz da equação da opção A

15.



Seja r a reta de simetria.

r: $\frac{(y - Ya)}{(x - Xa)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3-(-2))}{-1-4} = -1 \Rightarrow r: y + x = 2$

O ponto P pode ser parametrizado P = (t, 2-t) , tomando o vetor de extremos M e P = M-P = (3-t, 2+t) , temos que esse vetor deverá ser paralelo ao vetor (1,1) , vetor normal de r.

De onde tiramos que 3-t = 2+t => t= ½

$2P = M + M` \Rightarrow M´ = 2P - M = (1,3) - (3,4) = (-2,-1)$

M` atende à equação : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ (Opção C)

---

16. Pela definição de continuidade no ponto x=7, temos que:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15} - 8} = a$$

Aplicando L´Hospital:

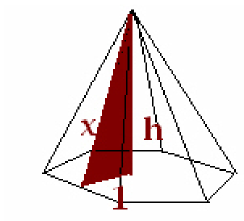
$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15} - 8} = \lim_{x\to 7} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+15}}} = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x^2+15}}{2.x\sqrt{x}} = \frac{4}{7\sqrt{7}} = a$$

Derivando g(x):

$$g´(x) = 2\ln\left(2x + \frac{6}{7}\right).\frac{2}{\left(2x + \frac{6}{7}\right)}$$ (Opção D)

$$\Rightarrow g´(\sqrt{7}a) = 4\ln\left(\frac{8}{7} + \frac{6}{7}\right).\frac{1}{\left(\frac{8}{7} + \frac{6}{7}\right)} = 2\ln 2 = \ln 4$$

17.



Seja L a aresta da base e ´´a´´ a aresta do cubo.

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\begin{cases} h = 2.a.\sqrt{3} \\ a^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = h^2 + 1 \Rightarrow x = 7$$

$$\begin{cases} A_{lat-piramide} = \dfrac{6.L.x}{2} = 3.\dfrac{2}{3}\sqrt{3}.7 = 14.\sqrt{3}cm^2 \\ A_{cubo} = 6.a^2 = 24cm^2 \end{cases}$$

$$Razão = \frac{14\sqrt{3}}{24} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$ (Opção B)

---

18. $(sen^2x + cos^2x) = 1 \Rightarrow (sen^2x + cos^2x)^2 = 1$

$$\Rightarrow sen^4x + cos^4x + 2.(senx.cos x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} + 2\left(\frac{sen2x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $0 < x < \pi$ => **$0 < 2x < 2\pi$ e portanto as solu**ções admitidas serão:
$2x = \{ \pi/3 , 2\pi/3 , 4\pi/3, 5\pi/3 \}$. Logo $x = \{ \pi/6 , \pi/3 , 2\pi/3 , 5\pi/6\}$

Soma dos inversos: $6/\pi + 3/\pi + 3/(2\pi) + 6/(5\pi) = (90 + 15 + 12)/(10\pi) = 117/(10\pi)$
(Opção B)

---

19. $$y´(x) = \left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) + 2\left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)sen\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$$

$$= \left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)\left[3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) + 2sen\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)\right]$$

$$y´\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right) \Rightarrow L : \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Achando os pontos P e Q :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow P = (0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pi + 1)) \\ y = 0 \Rightarrow Q = (\dfrac{1 + \pi}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pi + 1).\dfrac{1 + \pi}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\pi + 1)^2}{8}$$ (Opção B)

20.

$$g(x) = f(x^2) \Rightarrow g´(x) = f´(x^2).2x = 2x.sen(cos\sqrt{x^2}) = 2x.sen(cos|x|)$$
$$x > 0 \Rightarrow g´(x) = 2x.sen(cos x)$$

$$g´(x^2) = 2.x^2.sen(cos(x^2))$$

(Opção C)