1992/1993
(Rosa)

MINISTÉRIO DA MARINHA
DIRETORIA DE ENSINO DA MARINHA
ESCOLA NAVAL

CONCURSO DE ADMISSÃO À ESCOLA NAVAL - 1992

PROVA 1 - MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES GERAIS

1 - Esta Prova é composta de um questionário, contendo 25 questões valendo 100 (cem) pontos.

2 - A duração total da Prova será de três horas, incluindo o tempo destinado ao preenchimento da Folha-Resposta.

3 - Tenha cuidado ao marcar a Folha-Resposta. Cubra toda a quadrícula usando lápis preto nº 2. Caso precise, apague completamente a quadrícula.

4 - Marque somente uma alternativa para cada pergunta.

5 - Ao receber a sua Folha-Resposta, verifique se a cor e o número da Prova constantes da mesma correspondem aos desta Capa de Prova.

6 - Só comece a responder a Prova ao ser dada a ordem para iniciá-la, interrompendo a sua execução no momento em que for determinado.

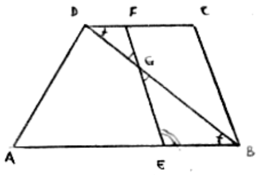
7 - Iniciada a Prova, só será permitido dirigir-se ao Fiscal, em caso de problema de saúde ou ocorrência grave, que impossibilite a sua realização.

8 - Para rascunho, utilize o verso das folhas de questões e as duas folhas em branco que estão, em anexo, ao questionário.

9 - O candidato deverá cumprir, rigorosamente, as determinações constantes das "Instruções Gerais aos Candidatos", que serão lidas, obrigatoriamente, pelo Supervisor/Fiscal, antes do início da Prova.

1992/1993

1 Sobre as bases AB e CD de um trapézio tomam-se os pontos E e F, respectivamente, de um modo que EF seja paralela ao lado BC. Se G é o ponto de interseção de BD e EF, então



$\Delta BEG \sim \Delta DFG$

$\frac{GB}{GD} = \frac{EB}{DF}$

$\overline{GB}\,\overline{DF} = \overline{GD}.\overline{EB}$

(A) $\overline{EB} = \overline{DF}$

(B) $\overline{GB}.\overline{DF} = \overline{GD}.\overline{EB}$

(C) $\overline{GB}.\overline{EB} = \overline{GD}.\overline{DF}$

(D) $\overline{AE}.\overline{EB} = \overline{DF}.\overline{FC}$

(E) G é o ponto médio de BD

2 - O Conjunto-Imagem da função $f(x) = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{x^2 - 16}$ é

$x \in dom\,f \to \begin{matrix} 16 - x^2 \geq 0 \\ 16 - x^2 \leq 0 \end{matrix} \to 16 - x^2 = 0$

$Im\,f = \{0\}$

(A) $[-4, 4]$

(B) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

(C) $\{0\}$

(D) $\{-4, 4\}$

(E) $[0, \infty)$

3 - Sejam $A = [0, 2)$, $B = (-1, 2]$ e $C = (1, 3)$. O complemento de $A \cap (B - C)$ em relação ao conjunto B é igual a

$B - C = (-1, 1]$

$D = A \cap (B - C) = [0, 1]$

$\complement_B D = B - D = (-1, 0) \cup (1, 2]$

(A) $(-1, 0) \cup [1, 2]$

(B) $(-1, 2)$

(C) $(-1, 0] \cup (1, 2]$

(D) $(-1, 1]$

(E) $(-1, 0) \cup (1, 2]$

4 - A raiz real da equação $x^{1993} + 1993x = 1993$ pertence a qual dos intervalos abaixo ?

(A) (0, 2)

(B) (2, 3)

(C) (3, 4)

(D) (4, 5)

(E) (5, 1993]

$P(x) = x^{1993} + 199x - 1993 =$

$P(0) = -1993$

$P(1) = 1 + 1993 - 1993 = 1$

$x_1 \in (0,1) \subset (0,2)$

$P'(x) = 1993\,x^{1992} + 1993 >$

$P'(x) > 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$

2ª solução

$x\,(x^{1992} + 1993) = 1993$

$0 < \dfrac{1993}{x^{1993} + 1993} \leq 1$

5 - Um octaedro possui seus vértices no centro de cada uma das faces de um cubo de aresta a . A área lateral do octaedro é

(A) $\dfrac{a^2}{8}$

(B) $a^2\sqrt{3}$

(C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

(D) $\dfrac{2a^2}{3}$

(E) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

$l = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, a

$S = 8 \cdot \dfrac{\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{4}$

$a^2\sqrt{3}$

6 - A área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela tangente à curva $y = 4x^2$ no ponto (1, 4) vale

(A) 8

(B) 4

(C) 2

(D) 1

(E) $\dfrac{1}{2}$

$y' = 8x$

$t: y - 4 = 8(x - 1)$

$y_A = 0 \rightarrow -4 = 8(x_A - 1) \rightarrow x_A - 1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow x_A = \frac{1}{2}$, $OA = \frac{1}{2}$

$x_B = 0 \rightarrow y_B - 4 = 8(-1) = -8$

$y_B = -4 \rightarrow OB = 4$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 1$

7 - Em um círculo de raio R inscreve-se um quadrado, neste quadrado inscreve-se um círculo, neste círculo um outro quadrado e assim por diante. O limite da soma das áreas dos círculos é

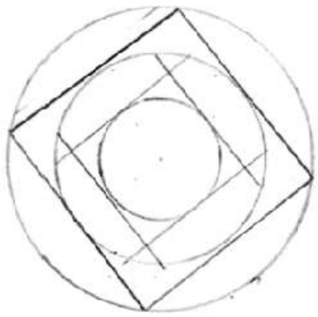
(A) $\sqrt{2}\,\pi\, R^2$

(B) $(\pi + 2)R^2$

~~(C)~~ $2\,\pi\, R^2$

(D) $(\sqrt{2} + \pi)R^2$

(E) $2\sqrt{2}\,\pi\, R^2$



$R_1 = R \rightarrow S_1 = \pi R^2$

$l_1 = R_1\sqrt{2} = R\sqrt{2}$

$R_2 = \frac{l_1}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \rightarrow S_2 = \frac{\pi R^2}{2}$

$\rightarrow l_2 = R_2\sqrt{2} = R$

$R_3 = \frac{l_2}{2} = \frac{R}{2} \rightarrow S_3 = \frac{\pi R^2}{4}$

$l_n = R_n\sqrt{2}$

$R_{n+1} = \frac{l_n}{2} = R_n\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{n+1} = \pi R_{n+1}^2 = \pi R_n^2 \frac{2}{4} = \frac{1}{2} S_n$

$\rightarrow S = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{4} + \dots = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi R^2$

8 - O conjunto de valores de λ para os quais há uma infinidade de matrizes X tais que

$$\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 8 & -4 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} . X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad , \text{ é}$$

3×1

(A) { 1, 4 }

(B) { -2, 2 }

(C) { -2 }

~~(D)~~ { 2 }

(E) { 4 }

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 8 & -4 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda - 4 + 8 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda = 2$

9 - O Lugar Geometrico dos pontos (x, y) tais que $\left| \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2} \right| = \sqrt{10}$ e uma

$F(2,4)$
$\rightarrow FF' = \sqrt{4^2+10^2} = \sqrt{116} > \sqrt{10}$
$F'(-2,-6)$

(A) reta

(B) circunferência

(C) parábola

(D) elipse

(E) hipérbole

10 - Temos $\frac{1}{x} < 2$ se e somente se

(A) $x > \frac{1}{2}$

(B) $x < \frac{1}{2}$

(C) $0 < x < \frac{1}{2}$

(D) $x < 0$ ou $x > \frac{1}{2}$

(E) $x < 0$

11 - Seja $P(x)$ um polinômio do 2º grau, tal que $P(-1) = 12$, $P(0) = 6$ e $x = 2$ e raiz de $P(x)$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ e

(A) -1

(B) 0

(C) 2

(D) 3

(E) 6

$P(0) = 6 \rightarrow c = 6$

$P(-1) = a - b + 6 = 12$ $\quad a - b = 6$

$P(2) = 4a + 2b + 6 = 0$ $\quad 2a + b = -3$

$(+) \rightarrow 3a = 3 \rightarrow a = 1,\ b = -5$

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(3) = 9 - 15 + 6 = 0$

2ª solução

$P(x) = a(x-2)(x-\alpha)$

$P(0) = a(-2)(-\alpha) = 6 \rightarrow a\alpha = 3$

$P(-1) = a.(-3)(-1-\alpha) = 12 \rightarrow a(1+\alpha) = 4$

$\frac{1+\alpha}{\alpha} = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = 3$

$P(3) = 0$

12 - Se $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, o valor de $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ é

(A) 0

(B) $\dfrac{1}{3}$

(C) $\dfrac{2}{3}$

(D) $\dfrac{4}{3}$

$\cancel{(E)}$ $\dfrac{8}{3}$

$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x}$

$f'(1/2) = \dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{8}{3}$

13 - São dados 8 pontos sobre uma circunferência. Quantos são os polígonos convexos cujos vértices pertencem ao conjunto formado por esses 8 pontos ?

$\cancel{(A)}$ 219

(B) 224

(C) 1255

(D) 2520

(E) 40320

$n_3 = C_8^3$

$n_4 = C_8^4$

$n_5 = C_8^5$

$n_6 = C_8^6$

$n_7 = C_8^7$

$n_8 = C_8^8$

$N = 2^8 - (C_8^0 + C_8^1 + C_8^2)$

$N = 256 - (1 + 8 + 28)$

$N = 219$

14 - O produto das raízes positivas da equação

$$x^{\log_5 x^2} = \frac{x^5}{125}$$ é

$\log_5 x^2 \cdot \log_5 x = \log_5 x^5 - \log_5 125$

$2\log_5 x \qquad 5\log_5 x$

$\log_5 x = y \rightarrow 2y^2 - 5y + 3 = 0$

$\log_5(x_1 \cdot x_2) = \log_5 x_1 + \log_5 x_2 = \frac{5}{2} \qquad x_1 x_2 = 5^{5/2} = 25\sqrt{5}$

(A) $\sqrt{5}$

(B) 5

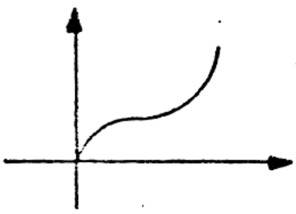
(C) $5\sqrt{5}$

(D) 25

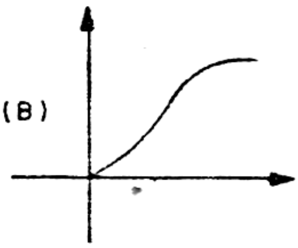
(E) $25\sqrt{5}$

15 - Um reservatório tem a forma de uma esfera com uma pequena abertura na parte de cima. Enche-se o reservatório por intermédio de uma torneira de vazão constante. O gráfico que melhor representa a altura da água no reservatório em função do tempo é

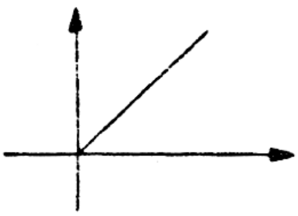
(A)



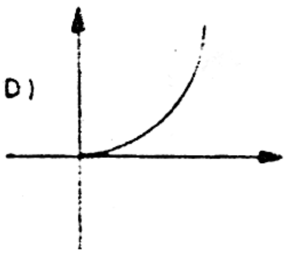
(B)



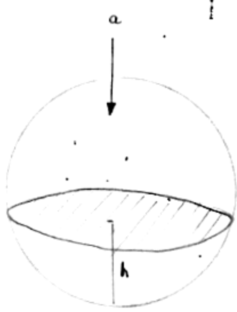
(C)



(D)



(E)



$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$

$at = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$

$t = \frac{\pi}{3a} h^2 (3R - h)$

$\frac{dt}{dh} = \frac{\pi}{3a}(6Rh - 3h^2) = \frac{\pi}{a} h (2R - h)$

16 - Se $\dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\cos x - \text{sen } x} = \text{tg } y$, então um possível valor para y é

(A) $x - \dfrac{\pi}{4}$

$tg\,y = \dfrac{tg\,x + 1}{1 - tg\,x \cdot 1}$

(B) x

$tg\,y = tg\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(C) $x + \dfrac{\pi}{4}$

$y = k\pi + x + \dfrac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$

(D) $x + \dfrac{3\pi}{4}$

$k = 0 \rightarrow y = x + \dfrac{\pi}{4}$

(E) $x + \pi$

17 - A Escola Naval (EN) receberá 20 novos Oficiais, entre Fuzileiros, Intendentes e Oficiais da Armada. De quantos modos pode ser preenchido o efetivo da EN se deve haver entre os 20 novos Oficiais pelo menos dois Fuzileiros, pelo menos dois Intendentes e pelo menos dois do Corpo da Armada ?

(A) 40

(B) 80

(C) 100

(D) 120

(E) 420

$f + i + a = 20$

$f \geq 2 \rightarrow f' = f - 1 > 0$

$i \geq 2 \rightarrow i' = i - 1 > 0$

$a \geq 2 \rightarrow a' = a - 1 > 0$

$f' + i' + a' = 17$

$N_{asp} = C^2_{16} = 120$

$f + i + a = 20$

$f \geq 2,\ i \geq 2,\ a \geq 2$

$n_{sol\,int\,pos} = C^2_{19} = 171$

soluções com $f = 1,\ i = 1,\ a = 1$

$i + a = 19 \rightarrow C^1_{18} = 18$

soluções com $f = i = 1$; $f = a = 1$

$a = 18 \rightarrow 1$

$\rightarrow n = 171 - 3 \times 18 + 3 = 120$

18 - O Lugar Geométrico das imagens dos complexos $z = x + yi$ tais que $x^2 - y^2 + x + y = 0$ é

$(x+y)(x-y) + x+y = 0$

$(x+y)(x-y+1) = 0$

$x+y = 0$ ou $x-y+1 = 0$

(A) uma reta

(B) uma circunferência

(C) uma parábola

(D) formado por duas retas concorrentes

(E) formado por duas retas paralelas

19 - Sejam $h(x) = x^3$, $t(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq -1$ e $f(x) = t(h(2x))$.

O valor de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{9}\right)$ é

$f^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = x \rightarrow f(x) = \frac{1}{9}$

$\rightarrow t(h(2x)) = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{1}{1+h(2x)} = \frac{1}{9} \rightarrow h(2x) = 8$

$(2x)^3 = 8 \quad x = 1$

(A) -2

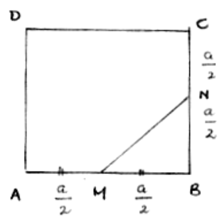
(B) -1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

20 - Os pontos médios dos lados AB e BC do quadrado ABCD são M e N, respectivamente. A reta MN divide a superfície do quadrado ABCD em duas superfícies disjuntas tais que a razão de suas áreas vale



$S_{MBN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

$S_{AMNCD} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}$

$\frac{S_{AMNCD}}{S_{MBN}} = 7$

(A) 8

(B) 7

(C) 6

(D) 5

(E) 4

21 - Anos bissextos são os divisíveis por 400 e também os divisíveis por 4 mas não por 100. Quantos anos bissextos há entre 1993 e 2993 ?

(A) 240

~~(B)~~ 243

(C) 245

(D) 248

(E) 250

$1993 = 4 \times 498 + 1$

$2993 = 4 \times 748 + 1$

$n_4 = 748 - 498 = 250$

$1993 = 100 \times 19 + 93$

$2993 = 100 \times 29 + 93$

$n_{100} = 29 - 19 = 10$

$1993 = 400 \times 4 + 393$

$2993 = 400 \times 7 + 193$

$n_{400} = 7 - 4 = 3$

$n_b = 250 - 7$

$= 243$

22 - Considere os números complexos $u = 1 + i$ e $v = 1 - i$. O valor de $u^{52} \cdot v^{-51}$ é

~~(A)~~ v

(B) u

(C) $v - u$

(D) $u + v$

(E) $u - v$

$u \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{51} = (1+i)\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{51} =$

$(1+i)\left(\frac{(1+i)}{1^2-i^2}\right)^{51} = (1+i)\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{51} =$

$(1+i)^2 i^{51} = (1+i)(-i)$

$= -i - i^2 = 1 - i$

23 - O coeficiente de ab^3c^5 no desenvolvimento de $(a + b + c)^9$ é

(A) 60

(B) 84

(C) 120

~~(D)~~ 504

(E) 1260

$\text{coef} = \frac{9!}{1!\,3!\,5!} = 504$

24 - Uma senhora extremamente gorda resolveu fazer uma dieta e perdeu em três meses 30% de seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40%. No decorrer desse semestre, o peso da senhora

$P \to 0{,}7P \to 1{,}4(0{,}7P)$

$\to 0{,}98P$

$\to \Delta = -2\%$

(A) aumentou 16%.

(B) aumentou 10%.

(C) manteve seu valor inicial.

(D) diminuiu 10%.

(E) diminuiu 2%.

25 - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta = 1$

$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}$

$(\div) \quad tg\,\theta = \sqrt{3}$

$\theta = 60^\circ$

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

(E) 120°