MINISTÉRIO DA MARINHA
ESCOLA NAVAL
SUPERINTENDÊNCIA DE ENSINO

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1989/1990

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1 - Este Caderno de Prova é composto de 25 questões, todas de igual valor.

2 - Além deste Caderno de Prova, cada candidato receberá um CARTÃO DE RESPOSTAS com tarja vermelha, para ser processado em computador.

3 - É proibido ter em seu poder livros, cadernos, papéis, bolsas, calculadoras eletrônicas, relógio com calculadora e régua de cálculo, durante a realização da prova.

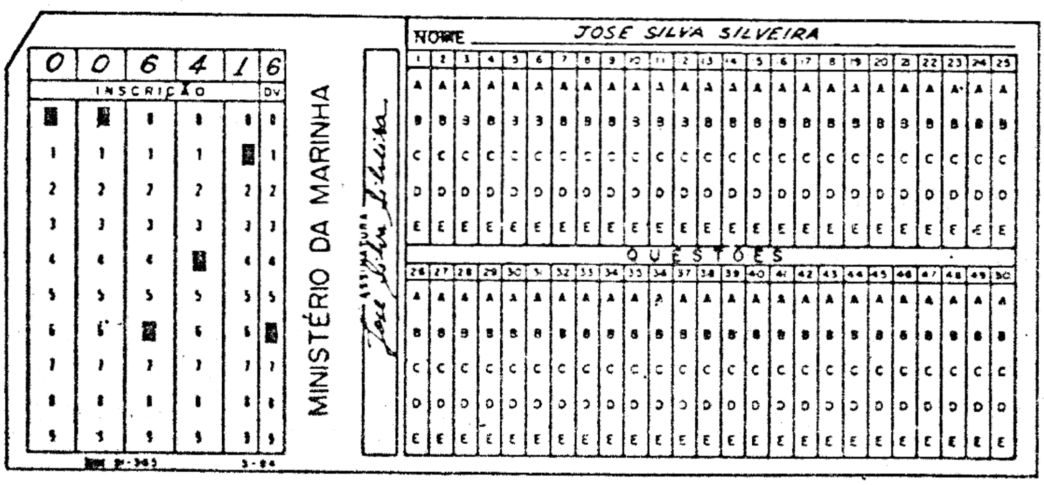
4 - Só comece a responder às questões ao ser dada ordem para iniciar a prova.

5 - O tempo disponível para a resolução das questões e perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS é de 3 horas. Após decorridos 30 minutos do início da prova, o candidato que terminar poderá retirar-se.

6 - O candidato deverá ter o máximo cuidado para não cometer erros na perfuração do CARTÃO DE RESPOSTAS. Mais de uma resposta perfurada num mesmo item o tornará invalidado.

7 - Recomenda-se ao candidato que NÃO DOBRE ou DANIFIQUE O CARTÃO DE RESPOSTAS para que não seja rejeitado por ocasião da correção no computador.

8 - Escreva seu nome (legível), assine, coloque o número de inscrição e perfure-o no CARTÃO DE RESPOSTAS, conforme o modelo abaixo.



MATEMÁTICA

1. O 1989º algarismo depois da vírgula na expansão decimal de $\frac{5}{39}$ é

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 5
(E) 8

$50 \,|\, 39 \to 0{,}128205\,1$; 110; 320; 80; 20; 200; 50

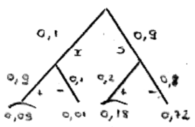
$\frac{5}{39} = 0{,}128205\,128205\ldots$

$1989 \,|\, 6 \to 331$, resto 3

---

2. 10% de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para identificar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a uma pessoa infectada, e dá 80% de acertos quando aplicado a uma pessoa sadia. Qual é a porcentagem de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

(A) 20%
(B) 25%
(C) 33%
(D) 50%
(E) 87%



$P = \frac{0{,}09}{0{,}09 + 0{,}18} \times 100\% =$

$\frac{9}{27} \times 100\% = \frac{1}{3}\, 100\% = 33{,}33\%$

---

3. $x^4 + rx^2 + s$ será divisível por $x^2 + 4x + 6$ só se $r + s$ for igual a

(A) 10
(B) 15
(C) 16
(D) 24
(E) 32

$x^4 + rx^2 + s \,|\, x^2 + 4x + 6$

$-x^4 - 4x^3 - 6x^2 \quad\to\quad x^2 - 4x + r + 10$

$-4x^3 + (r-6)x^2 + s$

$4x^3 + 16x^2 + 24x$

$(r+10)x^2 + 24x + s$

$-(r+10)x^2 - (4r-40)x - 60$

$-(4r+16)x + s - 6r - 60 = 0$

$4r + 16 = 0 \to r = -4$

$s - 6r - 60 = 0 \to s = 36$

---

4. O sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - 7y + 3z = -5 \end{cases}$$

(A) Não possui solução.
(B) Possui uma infinidade de soluções.
(C) Possui um número finito, maior que um de soluções.
(D) Possui uma única solução, na qual o valor de z é positivo.
(E) Possui uma única solução, na qual o valor de z é negativo.

$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x - 9y = -6 \end{cases} \times 3$

$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x - 9y = -6 \end{cases} \times 3$

---

5. ABC é um triângulo equilátero de lado L. O produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ vale

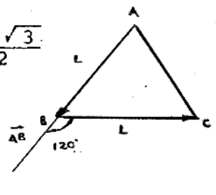
(A) $\frac{-L^2\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{-L^2}{2}$

(C) $\frac{L^2}{2}$

(D) L^2

(E) $\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = L\,L\cos 120°$

$= -\frac{L^2}{2}$

---

6. No triângulo de vértices A (1,3), B (4,5) e C (7,6), a equação da altura relativa ao vértice A é

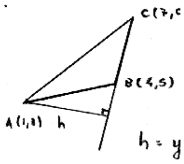
(A) $3x + y - 6 = 0$

(B) $x + 3y - 6 = 0$

(C) $3x - y = 0$

(D) $x - 3y + 8 = 0$

(E) $5x - 9y + 22 = 0$



$m_{BC} = \frac{6-5}{7-4} = \frac{1}{3}$

$m_H = -3$

$h: y - 3 = -3(x - 1)$

$3x + y - 6 = 0$

7. O cos $(2\underbrace{\text{arcsen}\,\frac{1}{3}}_{\alpha})$ é igual a

(A) $\frac{5}{9}$

(B) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(C) $\frac{2}{3}$

~~(D)~~ $\frac{7}{9}$

(E) $\frac{8}{9}$

$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{1}{3} \rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$

$y = \cos 2\alpha$

$= 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha \rightarrow = 1 - 2\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

---

8. O valor de $\dfrac{\log_9 \frac{1}{243} : \log_{32} 0{,}25}{\log_{0{,}125} 4 : \log_{0{,}04} 0{,}008}$ é

~~(A)~~ $\frac{-225}{16}$

(B) $-\frac{25}{9}$

(C) $-\frac{25}{27}$

(D) $\frac{63}{65}$

(E) 1

$$\frac{\dfrac{\log_3 243^{-1}}{\log_3 9} \div \dfrac{\log_2 4^{-1}}{\log_2 32}}{\dfrac{\log_2 4}{\log_2 8^{-1}} \div \dfrac{\log_{0,2} 0{,}008}{\log_{0,2} 0{,}004}} = \frac{\frac{-5}{2} \div \frac{-2}{5}}{\frac{2}{-3} \div \frac{3}{2}} = -\frac{225}{16}$$

---

9. O limite da soma $\frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \ldots$ é

(A) $\frac{1}{2}$

~~(B)~~ $\frac{5}{8}$

(C) $\frac{7}{8}$

(D) $\frac{8}{9}$

(E) 1

$S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{8}$

---

10. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ então, sendo A' a transposta de A, temos

(A) $A^2 = A$

~~(B)~~ $A^2 = 2A$

(C) A é invertível

(D) $A + A' = 0$

(E) $\det A = 1$

$A \cdot A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2A$

$A^n = nA$

---

11. Se, para todo x real, $f(2x + 3) = 3x + 2$ então $f[f(x)]$ é igual a

(A) x

(B) $\frac{x+3}{2}$

(C) $\frac{3x-5}{2}$

~~(D)~~ $\frac{9x-25}{4}$

(E) $9x + 4$

$2x + 3 = z \rightarrow x = \frac{z-3}{2}$

$f(z) = 3\frac{z-3}{2} + 2 = \frac{3z-5}{2}$

$f(f(x)) = \frac{3f(x)-5}{2} = \dfrac{3\frac{3x-5}{2} - 5}{2} = \frac{9x-25}{4}$

---

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}\right]$ é igual a

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^3} + x^2 - \cancel{x^3}}{\sqrt{x^3+x^2} + \sqrt{x^3}}$

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

~~(E)~~ ∞

13. A derivada da função $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ é

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x)^2}$

(A) $f'(x) = \dfrac{1}{e^x}$

(B) $f'(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

(~~C~~) $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$

$f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$

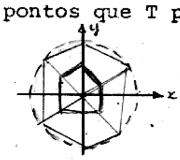
(D) $f'(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$

(E) $f'(x) = x + \dfrac{1}{e^{2x}}$

---

14. Seja $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < A^2\right\}$, onde $A > 0$. Seja T um subconjunto de S tal que a distância entre cada dois pontos de T é maior ou igual a A. O número máximo de pontos que T pode possuir é

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(~~D~~) 5
(E) 7



$A = 2R \sin\frac{\pi}{5} \rightarrow R = \dfrac{A}{2\sin\frac{\pi}{5}} < A$

---

15. A equação $tg^2\, 2x + 2tg\, 2x \cdot tg\, 3x = 1$ possui, no intervalo $[0, 2\pi]$

(A) 2 soluções
(B) 6 soluções
(C) 8 soluções
(~~D~~) 12 soluções
(E) 14 soluções

$2\,tg\,2x\,tg\,3x = 1 - tg^2 2x$

$(tg\,2x \neq 0)$ $\quad tg\,3x = \dfrac{1 - tg^2 2x}{2\,tg\,2x}$

$tg\,3x = cotg\,4x = tg\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$ →

$3x - \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = k\pi$

$7x = k\pi + \frac{\pi}{2} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$x = \dfrac{(2k+1)\pi}{14}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$0 \leq x \leq 2\pi$

$x = \left\{\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \cancel{\frac{\pi}{2}}, \frac{9\pi}{14}, \frac{11\pi}{14}, \frac{13\pi}{14}, \frac{15\pi}{14}, \frac{17\pi}{14}, \frac{19\pi}{14}, \cancel{\frac{3\pi}{2}}, \frac{23\pi}{14}, \frac{25\pi}{14}, \frac{27\pi}{14}\right\}$

---

16. Em um tetraedro regular de aresta a, a distância entre os centros de duas faces é

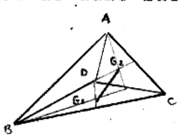
(A) $\dfrac{a}{6}$

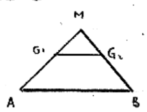
(B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

(C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

(~~D~~) $\dfrac{a}{3}$

(E) $\dfrac{a}{2}$





$\dfrac{G_1M}{G_1A} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{G_1M}{AM} = \dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{G_2M}{BM} = \dfrac{1}{3}$

$\rightarrow \Delta MG_1G_2 \sim \Delta MAB$

$\dfrac{G_1G_2}{AB} = \dfrac{1}{3}$ $\quad d = \dfrac{a}{3}$

---

17. Um poliedro convexo tem 6 faces retangulares e 12 faces triangulares. O número de diagonais desse poliedro é

(~~A~~) 49
(B) 52
(C) 60
(D) 61
(E) 91

$f_4 = 6$, $f_3 = 12$ → $F = 18$

$2A = 3 \times 12 + 4 \times 6 = 60$ $\quad A = 30$

$V + 18 = 30 + 2 \rightarrow V = 14$

$n_{diag} = C_{14}^2 - 30 - 6 \times 2$

$= 7 \times 13 - 30 - 12 = 49$

---

18. Um copo cilíndrico tem 6 cm de altura e tem uma circunferência da base medindo 16 cm. Um inseto está do lado de fora do copo, a 1 cm do topo, enquanto, do lado de dentro, a 5 cm do topo, está uma gota de mel. A gota e o inseto encontram-se em geratrizes do cilindro que são simétricas em relação ao eixo do cilindro. A menor distância que o inseto deve andar para atingir a gota de mel é

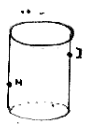
(~~A~~) 10 cm

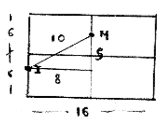
(B) 14 cm

(C) $(\sqrt{65} + 5)$ cm

(D) $(\sqrt{89} + 1)$ cm

(E) $4\sqrt{5}$ cm





19. ABCDEF é um hexágono regular. BD encontra AC em K e, encontra EC em M. A razão das áreas dos triângulos KCM e ACE é

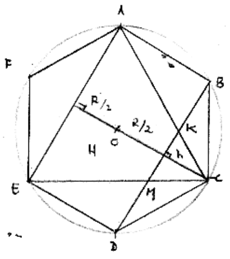
(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$



$\frac{h}{H} = \frac{R - \frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}} = \frac{1}{3}$

$\frac{S_{KCM}}{S_{ACE}} = \frac{1}{9}$

---

20. As imagens, no plano complexo, das raízes da equação $(z + 1)^4 = z^4$

(A) são vértices de um triângulo equilátero.
(B) são vértices de um quadrado.
(C) são colineares.
(D) pertencem a um mesmo círculo cujo centro é a origem.
(E) pertencem a um mesmo quadrante.

---

21. A equação $|2x + 3| = ax + 1$

(A) não possui solução para $a < -2$
(B) possui duas soluções para $a > 2$
(C) possui solução única para $a < \frac{2}{3}$
(D) possui solução única para $-2 < a < \frac{2}{3}$
(E) possui duas soluções para $-2 < a < \frac{2}{3}$

---

22. Num trapézio retângulo circunscritível, a altura é igual à

(A) média aritmética das bases.
(B) média geométrica das bases.
(C) média harmônica das bases.
(D) soma das bases.
(E) diferença das bases.

---

23. $x^2 + 1 > kx$ para todo x real se, e só se

(A) $k < 0$
(B) $k > 0$
(C) $-1 < k < 1$
(D) $-2 < k < 2$
(E) $k > 3$

$x^2 - kx + 1 > 0$

$\Delta < 0 \to k^2 - 4 < 0 \to k^2 > 4$

$-2 < k < 2$

---

24. O lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de três pontos colineares distintos é

(A) uma reta.
(B) um plano.
(C) uma esfera.
(D) um ponto.
(E) vazio.

---

25. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^{12}$ é

(A) 1260
(B) 630
(C) 315
(D) 230
(E) 115

$((x+1)^3)^{12} = (x+1)^{36} \to C^2_{36} = 630$

$T = \frac{12!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}(x^3)^\alpha (3x^2)^\beta (3x)^\gamma 1^\delta =$

$= \frac{12!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!} 3^{\beta+\gamma} x^{3\alpha+2\beta+\gamma}$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 12$

$3\alpha + 2\beta + \gamma = 2$

$\gamma = 2 \to \alpha = \beta = 0 \quad \delta = 10$

$coef_1 = \frac{12 \times 11}{2} \times 3^2 = 594$

$\gamma = 0 \to \beta = 1, \alpha = 0 \to \delta = 11$

$coef_2 = 12 \times 3 = 36$

$coef = 630$

$(z+1)^4 = z^4 \to \left(\frac{z+1}{z}\right)^4 = 1$

$\to \frac{z+1}{z} = cis\frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \to 1 + \frac{1}{z} = cis\frac{k\pi}{2}, \quad k = 1,2,3$

$\frac{1}{z} = cis\, 2\alpha_k - 1 = (\cos 2\alpha_k - 1) + i\, sen\, 2\alpha_k =$

$= -2 sen^2\alpha_k + i\, sen\,\alpha_k \cos\alpha_k =$

$= -2\, sen\,\alpha_k (sen\,\alpha_k - i\cos\alpha_k)$

$z = \frac{1}{2 sen\,\alpha_k}(sen\,\alpha_k + i\cos\alpha_k)$

$\to z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} ctg\frac{k\pi}{4}\, i \quad k = 1,2,3$

21:) $x \geq \frac{3}{2} \to 2x + 3 = ax + 1$

$(a-2)x = 2 \to x = \frac{2}{a-2} \to \frac{2}{a-2} \geq -\frac{3}{2}$

$\frac{2}{a-2} + \frac{3}{2} \geq 0 \to \frac{3a-2}{2(a-2)} \geq 0 \to$

$x < -\frac{3}{2} \to -2x + 3 = ax + 1$

$(a+2)x = -4 \quad x = \frac{-4}{a+2}$

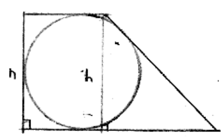
$\frac{-4}{a+2} < -\frac{3}{2} \to \frac{3}{2} - \frac{4}{a+2} \to \frac{3a-2}{2(a+2)} < 0 \to -2 < a < \frac{2}{3}$

$a \leq -2 \to$ 1 solução $\quad a = \frac{2}{3} \to$ 1 solução

$2 < a < \frac{2}{3} \to$ 2 soluções $\quad \frac{2}{3} < a \leq 2 \to$ não há solução

$a > 2 \to$ 1 solução

22.)



$l + h = B + b \to l = B + b$

$\to l^2 = (B-b)^2 + h^2$

$\to B^2 + b^2 + h^2 + 2Bb - 2Bh - 2bh =$

$= B^2 -$

$\to 4Bb = 2(B+b)h$

$h = \frac{2Bb}{B+b}$