

Escola Naval 1985
Prova de Matemática – Professor Botelho

1. Se i é a unidade imaginária e $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=0}^{100} (i^n + i^{-n})$ é igual a

- (A) 50
- (B) 0
- (C) 2
- (D) 100
- (E) -2

2. A soma das soluções da equação $(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta) \cos 3\theta = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, é

- (A) $\frac{7\pi}{6}$
- (B) $\frac{5\pi}{2}$
- (C) $\frac{5\pi}{12}$
- (D) $\frac{5\pi}{3}$
- (E) n. r. a.

3. A derivada de ordem n da função $f(x) = x e^x$, para $x = 1$, é

- (A) e
- (B) ne
- (C) $2ne$
- (D) ne^n
- (E) $(n + 1)e$

4. A interseção dos domínios das funções $f(x) = \operatorname{arcsen} \log \frac{x}{10}$ e $g(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$ é

- (A) $[1, 2]$
- (B) $(0, 2]$
- (C) $[1, \infty)$
- (D) \emptyset
- (E) \mathbb{R}_+^*

Escola Naval 1985
Prova de Matemática – Professor Botelho

5. A média harmônica das raízes da equação $2x^3 - 6x^2 - 7x + 3 = 0$ é

(A) $-\frac{9}{3}$

(B) 3

(C) $\frac{7}{2}$

(D) 1

(E) $\frac{9}{7}$

6. O polinômio $P(x)$ é tal que $P(1) = 4$ e $P(-1) = 2$. O valor numérico do resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 1$ quando $x = 6$ é

(A) 8

(B) 6

(C) -2

(D) 16

(E) 9

7. Uma bola de tênis cai de uma altura de 10 m. Após chocar-se com o solo, ela atinge uma altura igual a $\frac{2}{3}$ da altura anterior. Cai outra vez e a lei se repete nos choques subsequentes. Até que a bola pare, terá percorrido

(A) 20 m

(B) 30 m

(C) 50 m

(D) 60 m

(E) 40 m

8. O valor de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}2x (\cos^2 x - \text{sen}^2x)}{\sqrt{1 + \text{sen}^22x}} dx$ é

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

9. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Os valores de λ para os quais existe uma infinidade de matrizes X tais que $AX = B$ são

(A) 0 e -2

(B) -2

(C) 1

(D) 1 e -2

(E) 0 e 1

10. O brilho de uma fonte de intensidade \mathbf{i} a uma distância \mathbf{d} é dado por $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}^2}$. Suponha que haja uma fonte de intensidade \mathbf{A} na origem e outra de intensidade \mathbf{B} no ponto $(1,0)$. A razão $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ para a qual torna o ponto $(\frac{1}{3},0)$ o menos iluminado de todos é

(A) 1

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{3}{8}$

11. Com relação às funções $f(x) = |x - 2| + 1$ e $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, podemos afirmar que

- (A) $f(x)$ é par.
- (B) $f(x)$ e $g(x)$ não são pares nem ímpares.
- (C) $f(x)$ e $g(x)$ são ímpares.
- (D) $f(x)$ é ímpar e $g(x)$ é par.
- (E) $g(x)$ é ímpar.

12. Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{se } x \in \mathbb{Z}^* \\ 3, & \text{se } x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{3}, & \text{se } x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \end{cases}$$

Então $(f \circ g \circ f \circ g)(e)$ é igual a

- (A) e
- (B) $-\frac{1}{3}$
- (C) -1
- (D) 3
- (E) 1

13. Se $y = \text{sen} \left[\arctg(a^2 + b^2) + \text{arc cotg}(a^2 + b^2) \right]$, podemos concluir:

- (A) $y = 0$
- (B) $y = \frac{1}{2}$
- (C) $y = 1$
- (D) $y = \text{sen}(1)$
- (E) $y = \text{sen}(a^2 + b^2)$

14. Se $f'(x) = \cos^2(e^{x+1})$, $f(0) = 3$, $g(x) = f(x+1)$ e g^{-1} é inversa de g , o valor de $(g^{-1})'(3)$ é

- (A) $\cos^2 e$
- (B) $\sec^2 e$
- (C) $\tan(e)$
- (D) e^3
- (E) 1

15. Em um vértice de um poliedro convexo concorrem 4 arestas que medem 3 cm. O volume do sólido convexo cujos vértices são os centros das faces de tal poliedro mede, em cm^3 ,

- (A) $2\sqrt{2}$
- (B) 27
- (C) $\frac{27\sqrt{2}}{32}$
- (D) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$
- (E) $162\sqrt{2}$

16. A reta \mathbf{r} é paralela aos planos α , de equação $3x - 4y + 9z = 0$, e β , de equação $3x + 12y - 3z = 17$, corta as retas \mathbf{s} e \mathbf{t} de equações:

$$\underline{\mathbf{s}} : \frac{x}{2} = \frac{4-y}{3} = \frac{z+5}{4} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{t}} : x - 8 = \frac{2-y}{2} = -z - 3.$$

A soma das coordenadas do ponto de intersecção de \mathbf{r} e \mathbf{s} é

- (A) 4
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2
- (E) -1

17. Se $\sum_{p=0}^m \binom{m}{p} 3^{(m-p)} = 65536$, então o número de termos do desenvolvimento de $(x + 1)^{(m+3)}$ é

- (A) 13
- (B) 12
- (C) 11
- (D) 10
- (E) 15

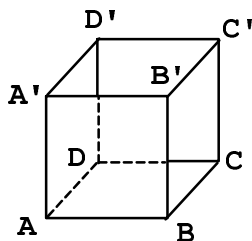
18. A superfície limitada pela curva de equação $y = x^2$ e pela reta $y = 4$ gira em torno da reta $y = 5$. O volume do sólido assim gerado mede

- (A) $\frac{832 \pi}{15}$
- (B) $\frac{512 \pi}{15}$
- (C) $\frac{136 \pi}{5}$
- (D) $\frac{176 \pi}{5}$
- (E) 15π

19. Sabendo-se que $x_1 = i$, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, com m , n e p números reais não nulos, podemos afirmar que:

- (A) x_1 , x_2 , e x_3 são imaginários puros;
- (B) x_2 e x_3 são reais;
- (C) $x_1 x_2 x_3 = p$;
- (D) $m^2 = 2n + p$;
- (E) somente uma das raízes é real.

20. Prolonga-se a aresta $D'C'$ do cubo $ABCD A'B'C'D'$ de um segmento $C'P$ igual à aresta do cubo.



O ângulo α que AP forma com o plano da face ABCD tem tangente igual a

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$

21. Considere os gráficos das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = \text{cos}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. a área da superfície limitada inferiormente por $y = \text{sen}(x)$ e superiormente por $y = \text{cos}(x)$ mede

(A) $4\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 2

(D) $\sqrt{2}$

(E) $\sqrt{2} + 2$

22. Os vetores \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares e \vec{c} forma com \vec{a} e \vec{b} ângulos iguais $\frac{\pi}{3}$ rad. Se \vec{a} e \vec{c} são unitários, $|\vec{b}| = 2$ e $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ então $|\vec{p}|$ vale:

- (A) $\sqrt{5}$
- (B) $\sqrt{2}$
- (C) $\sqrt{15}$
- (D) 2
- (E) $2\sqrt{3}$

23. O valor de a que torna a função

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2a, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

contínua em $x = 0$, é

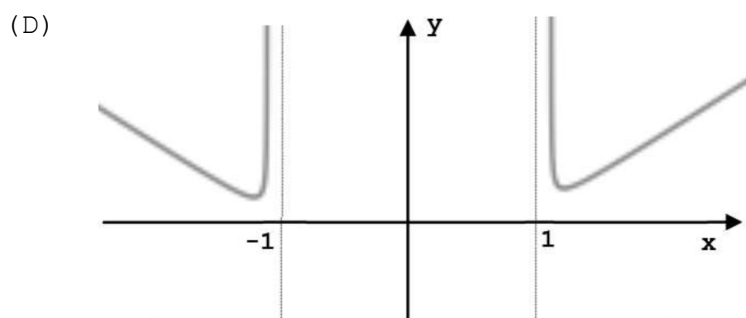
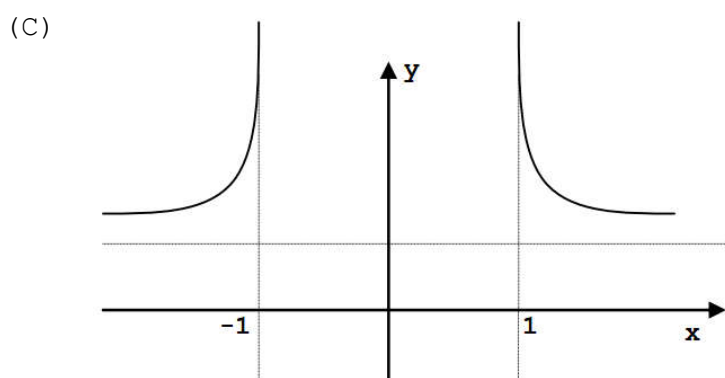
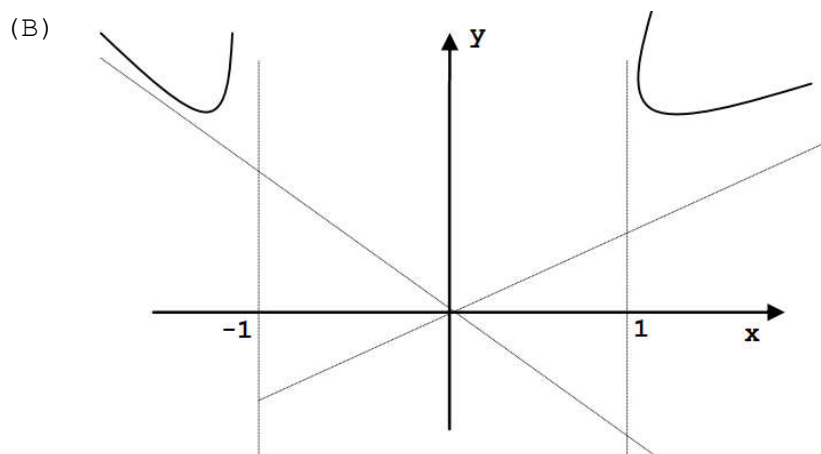
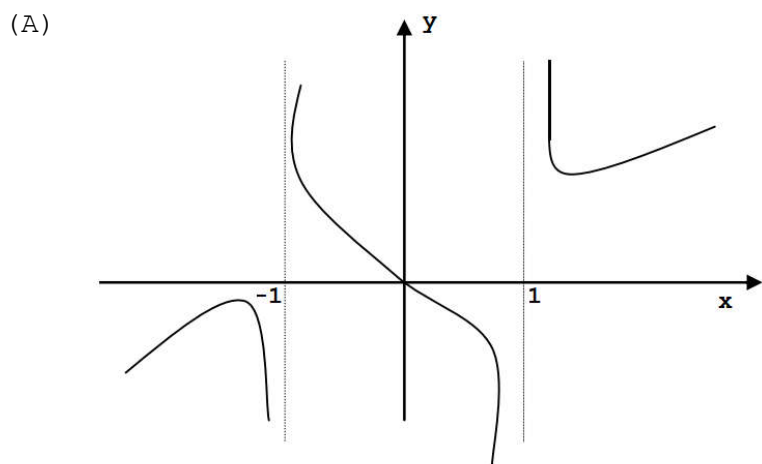
- (A) 2
- (B) $2\sqrt{e}$
- (C) $\frac{e}{2}$
- (D) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$
- (E) $2e^2$

24. A tripulação de um barco a remos deve ser escolhida entre 10 homens, dos quais 2 só podem ser timoneiros e os restantes só sabem remar. A tripulação deve ser formada por um timoneiro e 8 remadores, sendo 4 de cada lado.

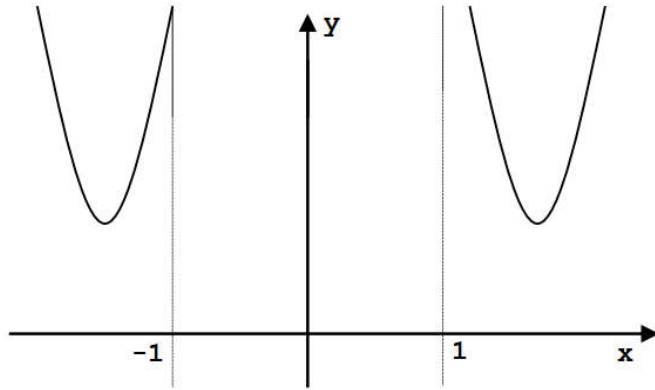
O número de tripulações que podem ser formadas, sabendo-se que 2 dos 8 remadores só remam do lado direito é:

- (A) 8640
- (B) 17280
- (C) 7200
- (D) 40320
- (E) 1440

25. O gráfico da função $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ é



(E)



Gabarito

- | | |
|-------|-------|
| 1. C | 14. B |
| 2. B | 15. A |
| 3. E | 16. D |
| 4. A | 17. B |
| 5. E | 18. A |
| 6. E | 19. E |
| 7. C | 20. A |
| 8. B | 21. B |
| 9. D | 22. C |
| 10. D | 23. D |
| 11. E | 24. B |
| 12. E | 25. D |
| 13. C | |